Actes de la IX Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Grapí Vilumara, P.; Massa Esteve, M. R. (ed.) (2012) p. 87-93

LA RESOLUCIÓ D'IGUALACIONS ALGEBRAIQUES I L'ARBRE ANALÍTIC EN EL *COMPENDIO MATEMÁTICO* DE TOMÀS VICENT TOSCA (1651-1723)

JOSEP M. NÚÑEZ ESPALLARGAS; JORDI SERVAT SUSAGNE
DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES I LA MATEMÀTICA. UNIVERSITAT DE BARCELONA.

Paraules clau: *àlgebra, Tomàs V. Tosca, ensenyament de la matemàtica*

Resolution of Algebraic Equations and the Analytic Tree in the *Compendio matemático* of Tomàs Vicent Tosca (1651-1723)

Summary: *The* Compendio matemático *of Tomàs Vicent Tosca (Valencia: 1651-1723) is a work of great interest for the history of mathematics teaching in our country, not only for the role he had as a textbook and as a reference for very different professionals in the first half of the Enlightenment century, but also for the todays teachers interested in learning about the evolution of mathematics teaching. In this paper we discuss some aspects of the chapters dedicated to algebra to help the student to understand the evolution of this knowledge, from the early sixteenth century algebraic works to the modernity represented by the texts of the late eighteenth and early nineteenth centuries. Issues such as symbols, terminology and conceptualization are discussed. Also the criteria used in the classification of equations and, especially, the author's methods for solving equations, showcasing its empirical character. Finally, we highlight the «analytical tree», which is a method of presenting a diagram of the process followed in solving systems of equations with several unknowns, reminding the descriptiv-dialectical methods developed by the French philosopher and mathematician Petrus Ramus in the sixteenth century.*

Key words: *algebra, Tomàs V. Tosca, mathematic teaching*

Quan es fa història de l'ensenyament de les matemàtiques, un recurs molt útil a l'aula és la presentació de situacions didàctiques preses directament de textos clàssics. D'aquestes situacions en podem extreure informació per conèixer millor l'evolució de les tècniques matemàtiques que han conduït a les versions actuals, i també les alternatives que en el seu moment no van tenir continuació. Tot això ens permet reflexionar i tenir una visió més àmplia sobre el plantejament metodològic actual en l'ensenyament de les matemàtiques (Núñez & Servat, 2000).

En aquesta línia, una obra que suscita el nostre interès, perquè estava dirigida a un públic general i també perquè cobria un ampli camp científic, és el *Compendio matemático* de Tomàs Vicent Tosca. Aquest text és especialment rellevant des d'una perspectiva històrica perquè es va publicar en una època, a principis del segle XVIII, situada cronològicament entre els primers grans textos matemàtics publicats a la Península des de mitjan segle XVI i part del XVII (com els de Pedro Nunes, Ortega, Pérez de Moya, Caramuel, etc.) i les obres clàssiques publicades cap a la meitat del segle de les llums i principis del segle XIX (com les de Bails, Juan Justo García, Ciscar o Vallejo).

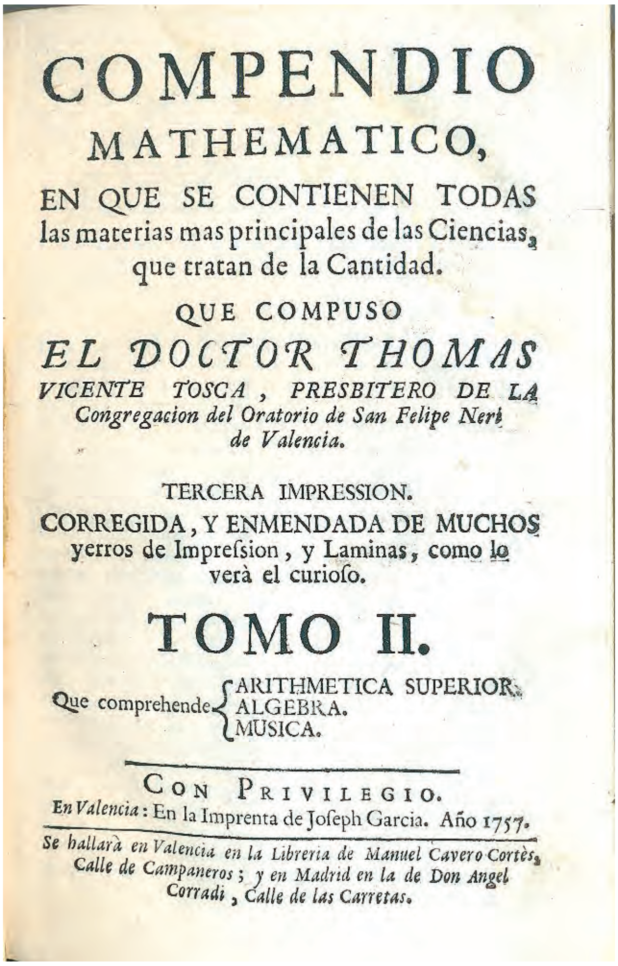
Tomàs Vicent Tosca va néixer a València en plena època del Barroc (1651) i va morir el 1723. Va seguir estudis de teologia, que li van permetre ser ordenat sacerdot i rebre un presbiterat a la Congregació de l'Oratori de Sant Felip Neri de València. Això li va proporcionar els recursos suficients i el temps lliure necessari per dedicar-se a les seves diferents aficions, entre les quals destacaven, sens dubte, les matemàtiques. Sense entrar en detall en la seva biografia, que és prou coneguda, cal destacar el seu paper com a cofundador (juntament amb els també matemàtics Baltasar Iñigo i Joan Baptista Corachan), el 1686, del moviment dels *novators* i el seu interès per l'ensenyament de la ciència. L'any 1697 va crear a les seves pròpies dependències de la congregació una mena d'acadèmia oberta, que va funcionar fins al 1717, en la qual oferia les seves classes.

Respecte a l'obra escrita, només assenyalarem les seves dues obres fonamentals, que tenen, totes dues, un caràcter enciclopèdic: el *Compendio matemático*, en nou volums, començat el 1709 i acabat el 1715, que abasta tant les diferents branques de la matemàtica com d'altres ciències afins, i el *Compendium philosophicum* (1721), en cinc volums, que recull el seu pensament filosòfic, d'enfocament clarament empirista i antiescolàstic.

El *Compendio matemático* va ser una obra de consulta molt utilitzada per estudiants i professionals, com ho testifiquen les diverses reimpressions que se'n van fer al llarg de mig segle, fins que les obres de Bails el van substituir per la modernitat que aportaven. Aquí ens ocuparem només de l'àlgebra que trobem en el tom II (Fig. 1).

Aquest tom II s'inicia amb el tractat IV, que tracta del que l'autor anomena *aritmètica superior*, part de l'aritmètica dedicada a les *potestats* (potències) i a les arrels de nombres enters i fraccionaris. Aquest tractat serveix de preparació per al següent, el tractat V, anomenat «De l'Àlgebra o Art Analítica». El tom II conclou amb un altre tractat, el VI, dedicat a la música especulativa i pràctica.

La primera qüestió que resulta d'interès per al professor és l'ús que l'autor fa dels caràcters i símbols algebraics. Encara que no resulten difícils d'interpretar per a un lector actual, les expressions algebraiques escrites per Tosca no presenten encara l'aparença de la notació moderna que ja utilitzaran, per exemple, Bails i els autors posteriors. Comparem la notació utilitzada per Pérez de Moya al segle XVI en el seu *Arithmética práctica y especulativa* (cap. II) amb la de Tosca: veiem que el pes i la complexitat del discurs perd terreny a favor de la brevetat simbòlica, i també que el sentit geomètric, que subjau sota el concepte de les diferents potències, tendeix més a l'abstracció moderna.



COMPENDIO
MATHEMATICO,
EN QUE SE CONTIENEN TODAS
las materias mas principales de las Ciencias,
que tratan de la Cantidad.
QUE COMPUSO
EL DOCTOR THOMAS
VICENTE TOSCA, PRESBITERO DE LA
Congregacion del Oratorio de San Felipe Neri
de Valencia.

TERCERA IMPRESSION.
CORREGIDA, Y ENMENDADA DE MUCHOS
yerros de Impreſsion, y Laminas, como lo
verà el curioſo.

TOMO II.

Que comprehende { ARITHMETICA SUPERIOR. ALGEBRA. MUSICA.

CON PRIVILEGIO.
En Valencia: En la Imprenta de Joſeph Garcia. Año 1757.
Se hallarà en Valencia en la Libreria de Manuel Cavero Cortès, Calle de Campaneros; y en Madrid en la de Don Angel Corradi, Calle de las Carretas.

FIGURA 1. Portada del tom II del *Compendio matemático*.

Caràcters Pérez de Moya	Notació P. M.	Notació Tosca	Notació actual
número	n.	n	n
cosa	co.	a	x
censo	ce.	aa	x^2
cubo	cu.	a3	x^3
censo de censo	cce.	a4	x^4
primer relato	R.	a5	x^5
censo y cubo	cecu.	a6	x^6
segundo relato	RR.	a7	x^7
censo de censo de censo	ccce.	a8	x^8
cubo de cubo	ccu.	a9	x^9

Amb els símbols de les operacions passa una cosa semblant: hi ha una clara tendència a abandonar les abreviatures a favor dels signes. Es passa així de les lletres, que empren autors com Pérez de Moya, a utilitzar símbols molt semblants als actuals. D'aquesta manera, la suma, en lloc de representar-se amb una creu grega com fem avui en dia, es representa amb una creu llatina ajaguda; la sostracció, amb un traç més allargat que l'actual, però el signe d'igualtat encara és representat amb una lletra, la lletra grega omega majúscula.

Pérez de Moya	**Tosca**	**actual**
p. (plus)	—┼	+
m. (minus)	—	–
yg. (igual)	Ω	=

Com que l'objectiu que persegueix Tosca en la seva àlgebra és *analitzar* (resoldre) problemes, i els que planteja es transcriuen en la pràctica utilitzant *igualacions* (equacions), la tasca inicial que aborda és la de classificar per enfocar millor la seva resolució. Comença per distingir entre *simples* (equacions de primer grau) i *compostes* (equacions de grau dos o major). També entre *reals* (que admeten solucions) i *impossibles* (que no les admeten) i entre *determinades* (amb un nombre finit de solucions) i *indeterminades* (d'infinites solucions). I com ell mateix diu: «*En los libros siguientes explicaré el modo de resolver todas las sobredichas especies de problemas por las reglas generales, y por otras particulares*» (Llibre II).

Encara que en els diferents exercicis que anirà resolent al llarg de la seva obra apareixen igualacions amb diverses incògnites, així com sistemes amb més d'una igualació, ambdós factors no són tinguts en compte ni li fan modificar la seva classificació d'igualacions inicial.

Un fet que no deixarà de cridar l'atenció a les persones interessades en els aspectes didàctics és l'escassetat, en aquest tractat V dedicat a l'àlgebra, del que avui entenem sota el terme de *problemes*, és a dir, qüestions pràctiques preses de la vida real en les quals s'apliquen els coneixements ensenyats. És cert que abunden al llarg del text els anomenats *problemes* per Tosca, però no són res més que mers exercicis numèrics d'aplicació de les regles explicades. Les úniques excepcions que trobem, totes referides a les igualacions simples, són un nombre reduït de qüestions situades en un context clàssic, que utilitzen personatges de la mitologia i que han estat preses literalment de Caramuel. Si comparem l'obra de Tosca amb la de Pérez de Moya, tan abundant en *demandes* (problemes), tenim, doncs, una altra manifestació d'aquesta tendència a l'abstracció que hem observat en altres parts de l'obra (Núñez & Servat, 2009). Potser, conscient d'aquest enfocament, Tosca prefereix anomenar l'àlgebra *art analítica* (seguint Prestet), com si volgués insistir davant el lector més en la importància dels mètodes i procediments que en les seves possibles aplicacions.

Malgrat l'interès didàctic que tenen, aquí no podem descriure ni comentar totes les etapes que segueix Tosca en la resolució dels diferents tipus d'igualacions que va plantejant en la seva obra; només apuntarem algunes indicacions d'interès docent.

Per a la resolució de les equacions compostes (de segon grau o major) amb una sola incògnita Tosca descriu dos mètodes. El primer és el que l'autor anomena «*de partición*» i es basa en els *Nouveaux Elements de Mathématiques* (1675), de Jean Prestet, encara que més simplificat per evitar la tediosa casuística d'aquest autor. Tosca parteix de l'observació empírica que multiplicant entre si repetidament binomis de la forma $x - a = 0$ s'obtenen «*igualaciones con segunda potestad*» (equacions de segon grau), «*igualaciones con tercera potestad*», i així successivament. Analitzant els coeficients i signes dels termes de les igualacions obtingudes després d'aquests productes, indueix regles generals per determinar no només el nombre de solucions d'una igualació del mateix tipus que l'estudiat, sinó també el valor i el signe d'aquestes solucions. Aquest mètode és el que, perfeccionat, encara utilitzem en l'ensenyament amb el nom de regla de Ruffini i permet, com és ben sabut, descompondre un polinomi en producte de binomis.

El segon mètode, que Tosca denomina «*de substitución*», el pren prestat del *Traité d'Àlgebra* (1690) de Michel Rolle i consisteix a donar valors a la incògnita i observar el signe del nombre obtingut en substituir el valor en l'equació, de manera que al llarg de diferents aproximacions successives aconseguim que aquest nombre sigui zero i arribem, per tant, a la solució de l'equació. Observem que aquest mètode el coneixem avui com la regla de Newton perquè va ser aquest autor el primer que el va exposar públicament, tot i que Rolle fos el primer a publicar-lo.

Quan no és una, sinó que són diverses les equacions que hem de resoldre, Tosca proposa utilitzar el mètode de «*igualación y substitución*» per reduir el nombre de variables i d'equacions. Aquesta metodologia és la que utilitza també per analitzar l'últim dels problemes que presenta als lectors amb nombres enters (segueix un breu capítol dedicat als problemes amb nombres fraccionaris) i que és també, formalment, el més complex:

v3 – 6vv + 11v – 6 Ω 0	$v^3 - 6v^2 + 11v - 6 = 0$
yy – 8y + v + 10 Ω 0	$y^2 - 8y + v + 10 = 0$
zz – 4z + y + v Ω 0	$z^2 - 4z + y + v = 0$

Resol les igualacions amb la metodologia explicada en les pàgines anteriors, i aconsella utilitzar un «*árbol analítico*» per poder visualitzar millor el procés seguit en aquests casos complexos: «*Para proceder con buen orden, y sin perturbación en las operaciones sobredichas, singularmente cuando son más de dos las igualaciones, convendrá mucho se dispongan éstas en forma de árbol*» (Llibre VI) (Fig. 2).

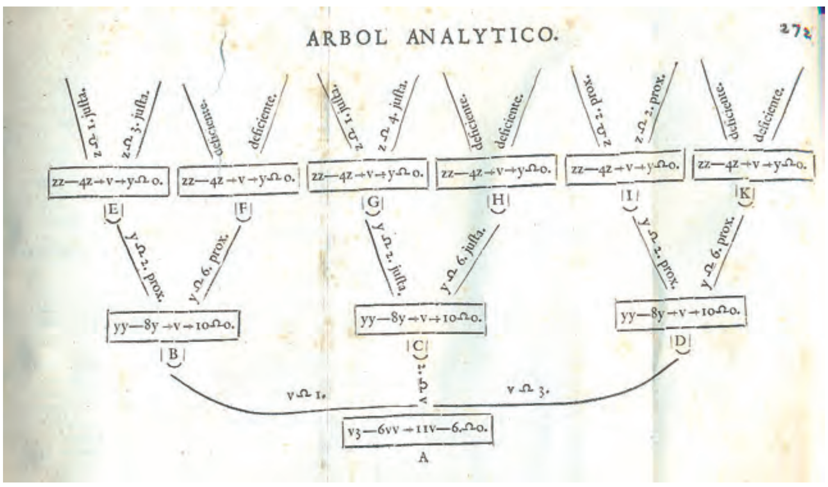


FIGURA 2. Arbre analític de Tosca.

Encara que la idea de l'arbre analític Tosca l'ha pres de Rolle —aquest autor l'anomena «*l'arbre de retour ou de direction*»—, i fins i tot l'exemple està pràcticament calcat (Rolle, 1690: 188), és interessant observar que aquesta manera de presentar el procés resolutiu dels sistemes d'equacions és poc usual en els textos de matemàtiques peninsulars. La veritat és que la influència directa o indirecta de Petrus Ramus (1515-1572) sembla bastant perceptible en aquesta qüestió, per no dir en el mateix enfocament empíric que subjau en els mètodes resolutius que hem comentat. Aquest autor, filòsof i matemàtic, va publicar a mitjan segle XVI un text, *Scholarum mathematicarum libri unus et triginta* (1569), que es pot considerar el primer llibre de didàctica de la matemàtica occidental (Núñez & Grau, 1999). Com a filòsof havia atacat durament l'escolasticisme medieval d'arrel aristotèlica, i, com a matemàtic, en aquesta obra va criticar la utilització dels *Elements* d'Euclides en l'ensenyament de la matemàtica sense que abans hi hagués una adaptació prèvia a les necessitats dels alumnes. En aquest sentit, va considerar que el mètode logicodeductiu, que tan bons resultats proporcionava en la construcció de la matemàtica, no els havia de donar també, necessàriament, en el seu ensenyament. Per això va proposar utilitzar-lo combinant-lo amb altres mètodes dialecticodescriptius de caràcter empíric, entre els quals destacaven els diagrames en arbre. Precisem que Ramus no va inventar aquests diagrames, que ja eren coneguts i utilitzats per autors anteriors com per exemple Llull, però sí que va ser el primer a ressaltar i impulsar justificadament la seva utilització en l'ensenyament de la matemàtica.

La influència del ramisme a Espanya ha estat relativament poc coneguda, ja que en convertir-se Ramus al calvinisme les seves obres i ensenyaments van ser perseguits per la Inquisició i, per tant, les obres que van persistir van romandre ocultes. Dels dos focus més importants del ramisme a Espanya, que eren les universitats de Salamanca i València, només del primer se n'han fet nombrosos estudis, potser a causa de la popularitat de les actes del judici inquisitorial a què van ser sotmesos un grup de professors de la Universitat de Salamanca. Del nucli ramista de la Universitat de València se n'han fet menys estudis, tot i que actualment comença a despertar l'interès dels investigadors (Barbeito, 2000). D'aquest nucli en destacaven dues figures, Pere Joan Núñez (1522-1602) i Frederic Furió Ceriol (1527-1592), pel fet d'haver estat tots dos alumnes de Ramus a París. No tenim coneixement de la pervivència dels ensenyaments d'aquest nucli valencià en el temps ni del seu entroncament, si n'hi va haver, amb grups d'intel·lectuals posteriors, com per exemple els *novators* o altres, però creiem que és, sens dubte, un camp de recerca prometedor. Perquè si bé és cert que podem trobar algunes investigacions sobre la influència del ramisme en la filosofia, la retòrica i fins i tot en l'ensenyament de la gramàtica en terres peninsulars, no hi ha treballs sobre la presència de les idees ramistes en l'ensenyament de les ciències i de la matemàtica en particular.

En conclusió, el *Compendio matemático* de Tomàs Vicent Tosca ofereix abundant i suggeridora informació tant al professor desitjós de conèixer l'evolució de les idees i els processos matemàtics en el nostre país, com a l'investigador interessat a treballar línies de coneixement poc estudiades.

Referències bibliogràfiques

BARBEITO, P. (2000), *Pedro Juan Núñez, humanista valenciano*, València, Generalitat Valenciana.

NÚÑEZ, J. M.; GRAU, A. (1999), «Petrus Ramus (1515-1572) y su concepción renovadora de la enseñanza de las matemáticas», *Revista de Educación*, **318**, 165-173.

NÚÑEZ, J. M.; SERVAT, J. (2000), «Els recursos històrics en l'ensenyament de la matemàtica». A: *Actes de les V Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Barcelona, SCHCT, 129-134.

NÚÑEZ, J. M.; SERVAT, J. (2009), «Estructura i context en una col·lecció de problemes de geometria del segle XVI: les "demandes" de Juan Pérez de Moya», *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, *Nova Època*, **2** (1), Barcelona, SCHCT, 419-426.

PÉREZ DE MOYA, J. (1569), *Arithmética práctica y especulativa,* Alcalá, Casa de Andrés de Angulo.

PRESTET, A. (1695), *Nouveaux elements des mathematiques ou principes generaux de toutes les sciences qui ont les grandeurs per objet*, París, André Palard.

RAMUS, P. (1569), *Scholarum mathematicarum libri unus et triginta*, Basilea, Eusebium Episcopium et Nicolai Fratris haeredes.

ROLLE, M. (1690), *Traité d'algebre ou principes generaux pour resoudre les questions de mathematique*, París, Estienne Michallet.

TOSCA, T. V. (1757), *Compendio matemático en que se contienen todas las materias más principales de las ciencias que tratan de la cantidad*, València, Imprenta de Joseph Garcia, tom II.